Echec et Math

Pauline Bessemans
Bruno Dular
Lucas Michel

Elèves du Centre Scolaire Saint-Benoît Saint-Servais à Liège, Belgique

Avec l'aide de Julien Jeunechamps, professeur retraité,
et de Julien Raskin, chercheur à l'ULg

Août 2016

Table des matières

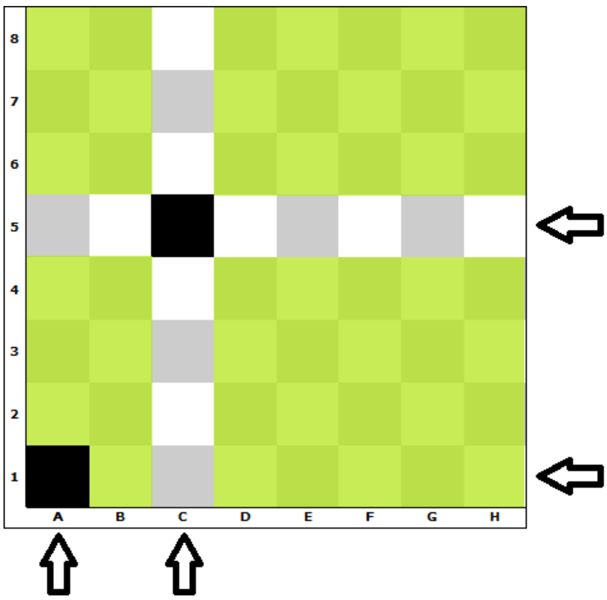
1 Position du problème

Le problème qui nous a été posé était : "Sur un échiquier de nxr cases, de combien de manières peut-on placer k ($k \leq \min(n,r)$) tours de sorte qu'aucune n'en menace une autre ?"
Au cours de nos recherches, nous avons élargi notre problème, nous avons décidé d'interdire certaines cases de l'échiquier et de voir ce qui se passait.

2 Rappels et conventions

Dans le jeu d'échec, les tours se déplacent d'autant de cases qu'elles veulent parallèlement aux bords de l'échiquier dans la limite de celui-ci bien entendu.
Ainsi, deux tours se menacent si et seulement si elles sont toutes deux sur la même ligne ou sur la même colonne.
La couleur des cases n'intervient pas.

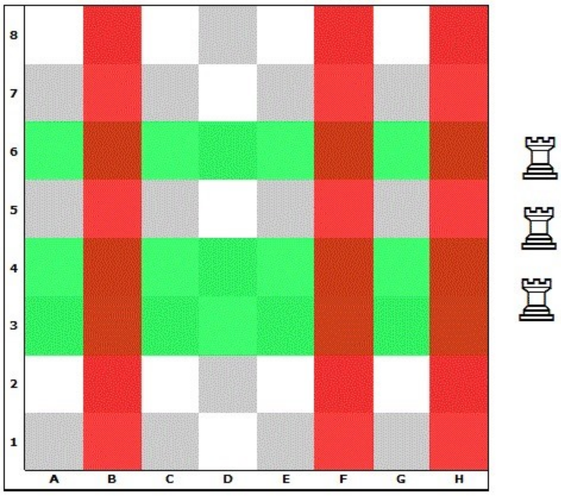
Nous avons constaté que permuter deux lignes entre elles ou deux colonnes entre elles (dans un souci de facilité ou pour avoir une meilleure visibilité comme montré dans la figure ci-dessous) ne changeait pas le nombre de manières de placer les tours.



Au cours de notre article, pour nos démonstrations, nous utiliserons des notions et des formules d'analyse combinatoire. Pour que les démonstrations ne soient pas trop longues, toutes les explications relatives aux bases de la combinatoire seront mises en annexe pour permettre la compréhension de chacun.
Le principe de la démonstration par récurrence sera également expliqué en annexe.

3 Exemple avec 3 tours à placer sur un échiquier de 8x8 et généralisation

La question qui se pose est la suivante : "De combien de manières peut-on positionner 3 tours sur un échiquier de 8x8 ?".



Placer une tour revient à choisir une ligne et une colonne qui seront bloquées pour les tours suivantes. Ainsi, pour placer 3 tours, il faut d'abord choisir 3 lignes parmi les 8, de même pour les 3 colonnes. Ceci donne en tout $C_8^3 \text{x} C_8^3 = (C_8^3)^2$ manières de choisir nos rangées.

Ensuite, on doit choisir 1 des 3 croisements sur la première ligne sélectionnée et y placer une tour, puis choisir 1 des 2 croisements restants sur la deuxième ligne sélectionnée. Pour la troisième tour, il ne reste qu'une seule possibilité. On obtient 3x2x1 = 3! possibilités de placer les 3 tours sur les intersections.

Ainsi, pour placer 3 tours sur un échiquier de 8x8, nous avons $(C_8^3)^2 \text{x} 3! = 18.816$ configurations.

La formule se généralise immédiatement à k tours sur un échiquier de $n \text{x} n$ sous la forme

$$T_n^k = (C_n^k)^2 \cdot k!$$

configurations.

Si l'échiquier est maintenant de $n \text{x} r$ cases, la formule devient tout simplement

$$T_{n,r}^k = (C_n^k) \cdot (C_r^k) \cdot k!$$

configurations.

4 Explication de la notion de cases interdites

Il est important de définir notre notion de cases interdites. En effet, nous avons choisi dans notre problème d'appeler "interdite" une case où on ne peut pas placer de tour. Alors, deux tours de part et d'autre de la case interdite se menacent.

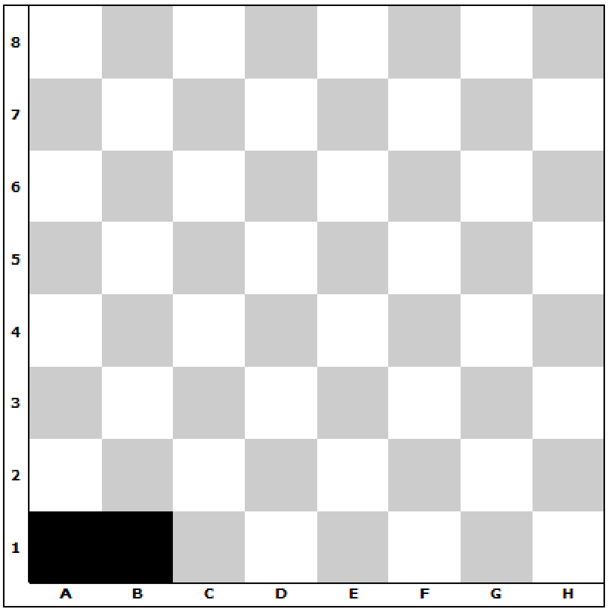
5 Exemple et démonstrations des cas de cases interdites

Cases interdites alignées : démonstration

Sur un échiquier nxr avec x cases interdites alignées ou alignables après permutations de lignes ou de colonnes, le nombre de manières d'y placer k tours est

$$\boxed{T_{n,r}^{k} - x \cdot T_{n-1,r-1}^{k-1}}$$

avec $0 \leq x \leq n$ si les cases sont alignées sur une ligne et $0 \leq x \leq r$ si elles le sont sur une colonne.



On démontre par récurrence sur x en se rappelant qu'on peut permuter les lignes entre elles et les colonnes entre elles.

1. $x = 0$: c'est trivial, mais le cas semble limite pour la récurrence.

Si $x = 1$, avec la case interdite en A1, il suffit d'enlever aux $T_{n,r}^{k}$ configurations possibles celles où une tour est placée en A1, soit $T_{n-1,r-1}^{k-1}$ car calculer le nombre de manières de placer une tour en A1 et les autres ailleurs revient à calculer le nombre de manières de placer une tour de moins (soit $k-1$) sur un échiquier auquel on a bloqué la ligne 1 et la colonne A (soit un échiquier de $(n-1)$x$(k-1)$).

2. Hypothèse : Il y a $T_{n,r}^{k} - x \cdot T_{n-1,r-1}^{k-1}$ façons de placer k tours sur un échiquier de nxr où les cases A1, A2,..., Ax sont interdites.

Thèse : il y a $T_{n,r}^{k} - (x+1) \cdot T_{n-1,r-1}^{k-1}$ façons de placer k tours sur un échiquier de nxr où les cases A1, A2,..., Ax, A$(x+1)$ sont interdites.

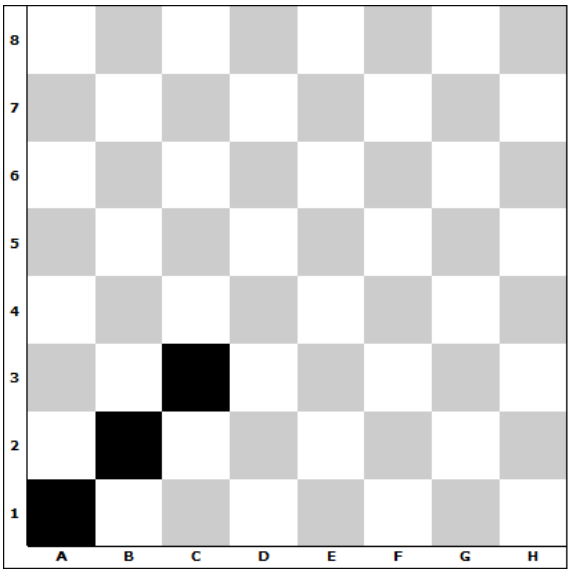
Démonstration : Avec la case A$(x+1)$ interdite en plus des autres, il suffit d'enlever aux $T_{n,r}^{k} - x \cdot T_{n-1,r-1}^{k-1}$ configurations celles où une tour est placée en A$(x+1)$, soit $T_{n-1,r-1}^{k-1}$ en appliquant le raisonnement ci-dessus (point 1) qui revient placer $k-1$ tours sur un échiquier de $(n-1)$x$(r-1)$ puisque si une tour est un A$(x+1)$ il n'y en a pas d'autres sur la ligne A.

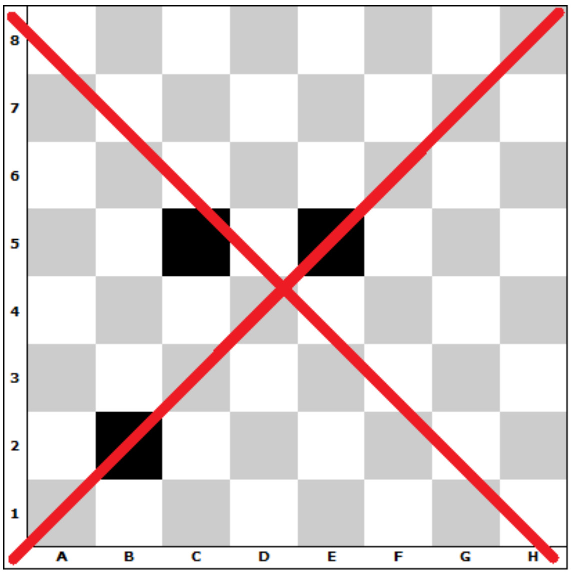
3. <u>Généralisation</u> :

Si la formule est vraie pour $x=1$, elle l'est aussi pour $x=2$ (vu point 2), donc aussi pour $x=3$ (vu point 2), et ainsi de suite pour toutes les valeurs entières de x possibles.

La démonstration est la même pour une ligne mais l'écriture est moins souple.

Cases interdites non-alignées 2 à 2 : exemple (3 cases)





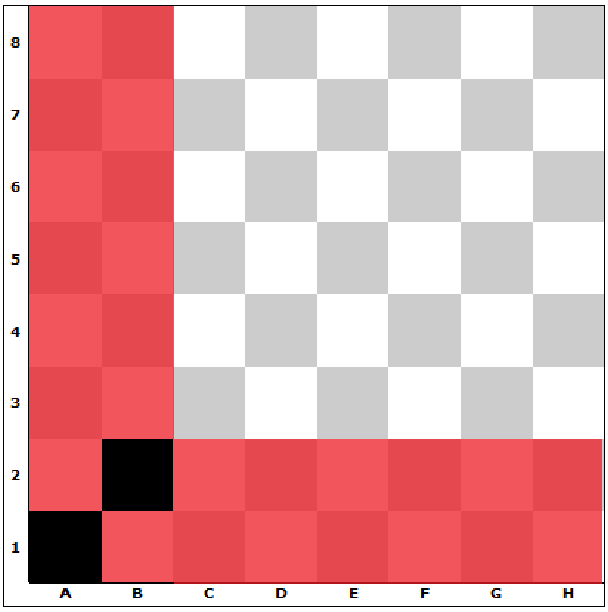
Dans le cas qui nous occupe, la première configuration est admise mais pas la seconde.

Pour calculer le nombre de façons de placer k tours sur un échiquier de nxr où 3 cases non-alignées sont interdites (posons A1, B2 et C3 comme dans l'exemple imagé vu les translations possibles de lignes ou de colonnes), on commencera par compter le nombre de façons de placer les k tours sur l'échiquier comme si aucune case n'était interdite. Nous l'avons déjà calculé plus tôt, cela vaut $T^k_{n,r}$.

Cependant, à ce résultat, il faut retirer toutes les configurations qui admettent une tour sur l'une des 3 cases interdites, ce qui revient à retirer $3T^{k-1}_{n-1,r-1}$ (nombre de façons de placer $k-1$ tours sur un échiquier de $(n-1)$x$(r-1)$) comme dit précédemment dans la démonstration de la formule avec les cases interdites alignées. Notons que $3 = C^1_3 =$ le nombre de façons de choisir 1 case parmi 3.

Nous obtenons donc $T^k_{n,r} - 3T^{k-1}_{n-1,r-1}$.

Nous avons néanmoins retiré trop de configurations car une configuration qui admet une tour en A1 peut également en admettre une en B2. Idem avec A1 et C3, B2 et C3. Il faut donc rajouter à notre résultat toutes les configurations qui admettent une tour en A1 et B2, A1 et C3, B2 et C3. Ce nombre de configurations correspond au nombre de façon de placer $k-2$ tours sur un échiquier de $(n-2)$x$(r-2)$ comme montré sur l'image ci-dessous, c'est-à-dire $T^{k-2}_{n-2,r-2}$, qu'il faudra rajouter 3 fois. Le nombre de configurations possibles s'élève donc à $T^k_{n,r} - 3T^{k-1}_{n-1,r-1} + 3T^{k-2}_{n-2,r-2}$. Notons encore que $3 = C^2_3 =$ le nombre de façons de choisir 2 cases parmi 3.



Par contre, lors de la dernière opération, nous avons rajouter trop de configurations car une configuration qui admet une tour en A1 et B2 peut également en admettre une en C3. Nous devons donc, pour que le résultat soit correct, ôter à notre précédent résultat, avec le même raisonnement que ci-dessus, 1 fois $T^{k-3}_{n-3,r-3}$. De nouveau, $1 = C^3_3 =$ le nombre de manières de choisir 3 cases parmi 3.

Le nombre de manières de placer k tours sur un échiquier de nxr avec 3 cases interdites non-alignées est donc de $T^k_{n,r} - 3T^{k-1}_{n-1,r-1} + 3T^{k-2}_{n-2,r-2} - T^{k-3}_{n-3,r-3}$.

Coefficients binomiaux

Dans le cas de 3 cases interdites sont non-alignées 2 à 2, nous avons vu apparaître les coefficients 1, -3, 3, -1 qui rappellent les coefficients de développement de $(a-b)^3$.

Nous avons ensuite envisagé le cas de 4 tours et nous sommes arrivés avec le même raisonnement à la formule $T^k_{n,r} - 4T^{k-1}_{n-1,r-1} + 6T^{k-2}_{n-2,r-2} - 4T^{k-3}_{n-3,r-3} + T^{k-4}_{n-4,r-4}$ qui fait apparaître une fois de plus les coefficients dits $(1,4,6,4,1)$, soient C^0_4, $-C^1_4$, C^2_4, $-C^3_4$, C^4_4 (voir annexes) ce qui est logique puisque $6 = C^2_4$, soit le nombre de manières de placer 2 tours sur 4 cases interdites. On a ainsi pu deviner la formule ci-dessous.

Cases interdites non-alignées 2 à 2 : démonstration

Sur un échiquier de nxr avec x cases interdites non-alignées 2 à 2, le nombre de manières d'y placer k tours est de

$$\boxed{J_x = \sum_{s=0}^{x}(-1)^s \cdot C^s_x \cdot T^{k-s}_{n-s,r-s}}$$

où $0 \leq x \leq \min(n,r)$ et où l'indice s exprime le nombre de cases contenant une tour parmi les cases interdites.

On raisonnera avec les tours placées en A1, B2, C3,... sur une diagonale, quitte à permuter des lignes entre elles et des colonnes entre elles.

1. Si $x = 0$, $J_0 = (-1)^0 \cdot C^0_0 \cdot T^k_{n,r} = T^k_{n,r}$ ce qui est juste (ce sont tous les cas possibles car aucune case n'a été interdite), mais pour la récurrence, c'est un cas limite.

Si $x = 1$, $J_1 = (-1)^0 \cdot C^0_1 \cdot T^k_{n,r} + (-1)^1 \cdot C^1_1 \cdot T^{k-1}_{n-1,r-1} = T^k_{n,r} - T^{k-1}_{n-1,r-1}$. Cela correspond à tous les cas possibles lorsqu'une case (A1) est interdite. C'est juste car cette formule est bien la même que celle trouvée ci-dessus (cases interdites alignées lorsque $x = 1$).

2. Hypothèse :

$$J_x = \sum_{s=0}^{x}(-1)^s \cdot C^s_x \cdot T^{k-s}_{n-s,r-s}$$

Thèse :

$$J_{x+1} = \sum_{s=0}^{x+1}(-1)^s \cdot C^s_{x+1} \cdot T^{k-s}_{n-s,r-s}$$

Démonstration : On part du membre de droite (noté MD) de la thèse, et on décompose la somme sur s en plusieurs morceaux ($s = 0$, s de 1 à x, $s = x+1$), afin d'y retrouver l'hypothèse :

$$MD = \sum_{s=0}^{x+1}(-1)^s \cdot C_{x+1}^s \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} = T_{n,r}^k + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot C_{x+1}^s \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} + (-1)^{x+1} \cdot C_{x+1}^{x+1} \cdot T_{n-(x+1),r-(x+1)}^{k-(x+1)}$$

Sachant que $C_{x+1}^{x+1} = 1$ et en appliquant la loi du coude : $C_{x+1}^s = C_x^s + C_x^{s-1}$ (car $s \geq 1$), on obtient :

$$MD = T_{n,r}^k + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot (C_x^s + C_x^{s-1}) \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} + (-1)^{x+1} \cdot T_{n-(x+1),r-(x+1)}^{k-(x+1)}$$

$$= T_{n,r}^k + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot C_x^s \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot C_x^{s-1} \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} + (-1)^{x+1} \cdot T_{n-(x+1),r-(x+1)}^{k-(x+1)}$$

Par hypothèse, $T_{n,r}^k + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot C_x^s \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} = J_x$. Donc,

$$MD = J_x + \sum_{s=1}^{x}(-1)^s \cdot C_x^{s-1} \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s} + (-1)^{x+1} \cdot T_{n-(x+1),r-(x+1)}^{k-(x+1)}$$

$$= J_x + \sum_{s=1}^{x+1}(-1)^s \cdot C_x^{s-1} \cdot T_{n-s,r-s}^{k-s}$$

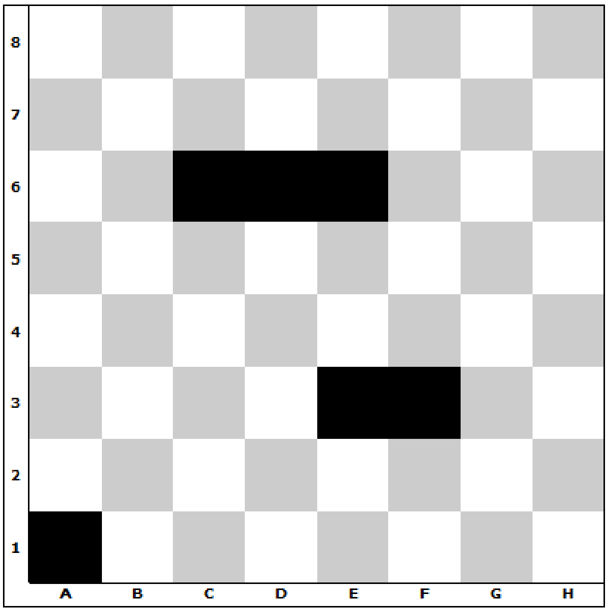
puisque $C_{x+1}^{x+1} = 1$.

Ceci vaut bien J_{x+1} car, en ajoutant aux x cases interdites en diagonale une case interdite en $(x+1{,}x+1)$, nous devons soustraire à J_x toutes les configurations qui comportaient une tour sur la case $(x+1{,}x+1)$ (c'est d'ailleurs pour cela que notre somme commence par un signe "$-$" car avec $s = 1$: $(-1)^1 = -1$).

Il faut commencer par enlever les configurations avec uniquement 1 tour en $(x+1{,}x+1)$ et donc 0 tours de 1 à x, soit $-C_x^0 \cdot T_{n-1,r-1}^{k-1}$.
Puis, il faut rajouter celles où il y a 1 tour en $x+1$ $x+1$ et 1 tour parmi les x premières cases interdites en diagonale, soit $+C_x^1 \cdot T_{n-2,r-2}^{k-2}$.
Ensuite, il faut soustraire celles où il y a 1 tour en $x+1$ $x+1$ et 2 tours parmi les x premières cases interdites en diagonale, soit $-C_x^2 \cdot T_{n-3,r-3}^{k-3}$.
Et ainsi de suite, jusqu'à la configuration contenant une tour dans chacune des $x+1$ cases interdites, soit $(-1)^{x+1} \cdot C_x^x \cdot T_{n-(x+1),r-(x+1)}^{k-(x+1)}$. C'est d'ailleurs le terme que l'on a fait rentrer dans la somme à l'avant dernière ligne.

3. Généralisation :
Si la formule est vraie pour $x = 1$, elle l'est aussi pour $x = 2$ (vu point 2), donc aussi pour $x = 3$ (vu point 2), et ainsi de suite pour toutes les valeurs entières de x possibles.

6 Exemple de mélange de cas de cases interdites



Nous nous pencherons sur le cas présenté par l'échiquier ci-dessus (on considère les cases interdites comme étant en A1, E3, F3, C6, D6, E6). Pour déterminer le nombre de configurations possibles, notre raisonnement se basera à la fois sur celui avec les cases interdites alignées et celui avec les cases interdites non-alignées.

Pour commencer, nous allons retirer à $T^k_{n,r}$ le nombre de configurations qui admettent 1 tour sur 1 case interdite, ce qui donnera ici $T^k_{n,r} - 6T^{k-1}_{n-1,r-1}$ car il y a en tout 6 cases interdites.

Ensuite, il faut rajouter les configurations qui ont été supprimées 2 fois (toutes les configurations qui admettent une tour sur deux cases interdites), c'est-à-dire celles avec des tours en A1 et C6, A1 et D6, A1 et E6, A1 et E3, A1 et F3, E3 et C6, E3 et D6, F3 et C6, F3 et D6, F3 et E6. Il faut donc rajouter ces 10 cas. On obtiendra ainsi $T^k_{n,r} - 6T^{k-1}_{n-1,r-1} + 10T^{k-2}_{n-2,r-2}$.

Cependant, certaines répartitions ont été comptées 2 fois, ce sont celles qui contiennent une tour sur 3 cases interdites. Ces configurations sont celles où une tour se trouvent en A1, E3 et C6, A1, E3 et D6, A1, F3 et C6, A1, F3 et D6, A1, F3 et E6. Il faut donc ôter ces 5 cas au résultat précédent. Puisqu'on ne peut pas placer 4 tours sur les cases bloquées sans que celles-ci se menacent entre elles, le résultat final est $T^k_{n,r} - 6T^{k-1}_{n-1,r-1} + 10T^{k-2}_{n-2,r-2} - 5T^{k-3}_{n-3,r-3}$.

En réfléchissant sur des exemples de mélanges comme celui-ci, nous avons trouvé une suggestions de formule généralisée, que ne n'avons malheureusement pas eu le temps de démontrer :

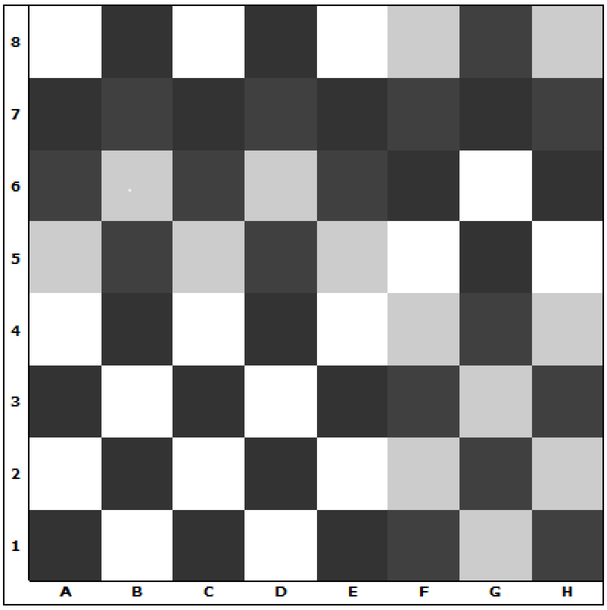
Le nombre de façons de placer k tours sur un échiquier de nxr où il y a des cases interdites est

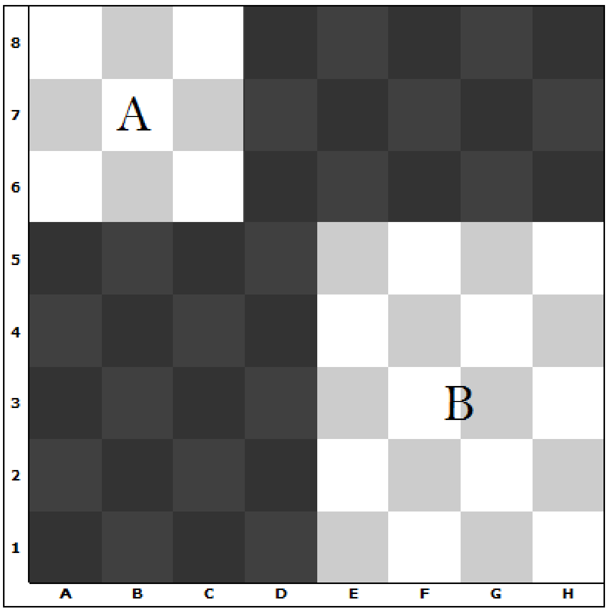
$$\sum_{s=0}^{q} (-1)^s P_s T^{k-s}_{n-s,r-s}$$

où q est le plus petit des nombres de lignes ou de colonnes contenant au moins une case interdite et où P_s est un coefficient naturel à déterminer dans chaque cas de figure et qui désigne le nombre de manières de placer s tours sur des cases interdites sans que celles-ci ne se menacent.

7 Zones indépendantes

Zones indépendantes "strictes"





Le second échiquier est équivalent au premier, certaines lignes et colonnes ont été permutées pour simplifier la compréhension.

A partir d'un grand nombre ($\geq \frac{n \cdot r}{2}$) de cases interdites, on peut envisager le problème autrement.

En effet, si les cases noircies sont interdites, le positionnement de tours dans A n'influe pas sur le positionnement de tours dans B, d'où le nom d'indépendance.

Pour notre exemple, essayons de placer 4 tours sur cet échiquier. La technique de calcul consiste à prendre chaque cas indépendamment :

0 tour dans A, 4 dans B,
1 tour dans A, 3 dans B,
2 tours dans A, 2 dans B,
3 tours dans A, 1 dans B.

Ce qui donne :

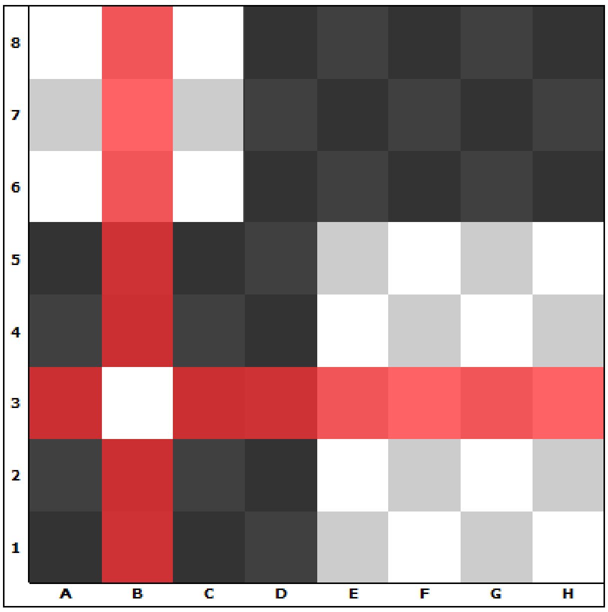
$$T^0_{3,3} \cdot T^4_{4,5} + T^1_{3,3} \cdot T^3_{4,5} + T^2_{3,3} \cdot T^2_{4,5} + T^3_{3,3} \cdot T^1_{4,5}$$
$$= 1 \cdot 96 + 9 \cdot 240 + 18 \cdot 120 + 6 \cdot 20 = 4536$$

Pour pouvoir généraliser avec un signe sommatoire, on convient que $T^k_{n,r} = 0$ si $k > n$ ou $k > r$, ce qui est logique car on ne peut pas mettre 4 tours dans un carré de 3x3, puisque $T^4_{3,3} = 0$.

Cette convention permet d'écrire $T^0_{3,3} \cdot T^4_{4,5} + T^1_{3,3} \cdot T^3_{4,5} + T^2_{3,3} \cdot T^2_{4,5} + T^3_{3,3} \cdot T^1_{4,5} + T^4_{3,3} \cdot T^0_{4,5}$ qui se généralise en

$$\sum_{s=0}^{k} T^s_{a,b} \cdot T^{k-s}_{c,d}$$

Zones indépendantes "à trou(s)"



Imaginons encore 2 zones indépendantes dans lesquelles nous devons placer 4 tours mais avec une case libre parmi les cases interdites (une case libre en B3 pour l'exemple).
S'il n'y a pas de tours en B3, la formule ne change pas mais si on place une tour en B3, on bloque alors la colonne B et la ligne 3 (en rouge) ce qui laisse 2 zones indépendantes de 3x2 et 4x4 pour

les tours.
La formule devient

$$\sum_{s=0}^{3} T_{3,2}^{s} \cdot T_{4,4}^{3-s}.$$

Au total, le nombre de configurations s'élève à

$$\sum_{s=0}^{4} T_{3,3}^{s} \cdot T_{5,4}^{4-s} + \sum_{s=0}^{3} T_{3,2}^{s} \cdot T_{4,4}^{3-s}.$$

Cela fonctionne également quand il y a plus de cases libres dans les cases interdites, la procédure se complique en s'inspirant des cas "opposés" où on interdisait plusieurs cases parmi des cases libres.

8 Ouvertures

On pourrait ouvrir le problème aux fous ou encore aux reines mais c'est plus difficile surtout si l'échiquier est rectangulaire.
On peut également envisager plus de 2 zones indépendantes ou déterminer les coefficients P_s du mélange des cas.
Une autre façon d'aborder le problème serait de définir les cases interdites comme des murs. Alors, en plus de l'interdiction de placements, 2 tours de part et d'autre du mur ne se menaceraient plus.

9 Conclusion

Nous pourrions dire que "nous avons eu bon" à réfléchir durant de longues heures sur ce problème mais les Français n'utilisent malheureusement pas cette expression.
Comme l'an dernier, les rencontres du temps de midi étaient des temps souvent forts faits de découvertes, de supputations, d'erreurs, de combats, de choix,... Que du plaisir (aussi pour le prof). Pour ceux qui le pourront, nous remettrons ça l'année prochaine.

Merci à toute l'organisation qui est derrière le projet Math en Jeans (non non Bruno, pas Math en Short) !, l'université de Liège (merci Julien) et le collège Saint-Servais qui permet à des élèves férus de math de l'être plus encore et de façon amusante.

10 Annexes (factorielles (!), combinaisons (C_n^p), démonstrations par récurrence, coefficients binomiaux et signe somme ($\sum$))

Récapitulatif des formules d'analyse combinatoire

Notion de factorielles et de permutations

$n!$ ($n \in \mathbb{N}$) est une formule qui sert à compter le nombre de manières d'ordonner n éléments (par exemple le nombre de files indiennes possibles avec 4 enfants) sachant que tous les éléments doivent être différents et ne peuvent être pris qu'une seule fois.
$n!$ vaut $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Par exemple, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Par convention, $0! = 1$.

Notion de combinaisons

C_n^k ($k, n \in \mathbb{N}$) est une formule qui sert à compter le nombre de manières de choisir k objets parmi n proposés ($0 \leq k \leq n$) sachant que l'ordre dans lequel ces objets sont tirés n'a aucune d'importance et qu'il n'y a pas de répétition/remise, c'est-à-dire que un objet choisi une fois ne peut l'être une seconde fois.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Par exemple, $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$.
On a toujours $C_n^0 = 1 = C_n^n$
C_n^k admet également $\binom{k}{n}$ pour notation (notation anglaise).

Principe de démonstration par récurrence

Partons d'un exemple. Je soupçonne que $1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
1. Je vérifie que si $n = 1$, la formule est trivialement correcte : $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
2. Hypothèse : $1 + 2 + ... + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$
Thèse : $1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$
Démonstration : $1 + 2 + ... + k + (k+1) = (1 + 2 + ... + k) + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$ $= (k+1) \cdot (\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$
3. Généralisation : La formule est vraie pour $n = 1$, donc pour $n = 2$ (deuxième étape), donc pour $n = 3$ (deuxième étape) et ainsi de suite.

La démonstration par récurrence peut vérifier un résultat (souvent une formule dépendant d'une variable entière) mais ne le fournit pas.

Une démonstration faite selon la méthode de récurrence comporte 3 étapes :
1. On vérifie que la formule est vraie pour le plus petit entier intéressant.
2. On suppose que la formule est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on prouve grâce à cette hypothèse que la formule est vraie pour $k + 1$.
3. Vu les deux points précédents, on prouve que la formule est vraie pour tous les nombres naturels en fonctionnant de proche en proche (si elle est vraie pour 1, elle le sera pour 2, et donc

pour 3, et ainsi de suite).

Coefficients binomiaux et signe somme

La formule du binôme de Newton (dans le cas d'une puissance d'une somme) est la suivante :

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k.$$

Le signe $\sum$ ("sigma", la lettre S majuscule en grec) signifie qu'on fait la somme des $C_n^k x^{n-k} a^k$ pour $k=0$, $k=1$, $k=2$,..., $k=n-1$, $k=n$.

Ainsi,

$$(x+a)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} a^k$$

$$= C_4^0 x^{4-0} a^0 + C_4^1 x^{4-1} a^1 + C_4^2 x^{4-2} a^2 + C_4^3 x^{4-3} a^3 + C_4^4 x^{4-4} a^4$$

$$= x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4.$$

La formule du binôme de Newton s'applique aussi dans le cas d'un puissance d'une différence et elle devient

$$(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (-a)^k.$$

Les coefficients C_n^0, C_n^1, C_n^2,..., C_n^{n-1}, C_n^n sont appelés coefficients binomiaux.
Une de leurs propriétés (loi du coude) est que

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$